Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 8 — 10. November 2022

Aufgabe 1: *(3 Punkte)* Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| = 1$. Untersuche, ob die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Falls die Folge konvergiert, dann bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe 2: *(1+1+1+1 Punkte)* Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wir nennen $x \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von A, geschrieben $x = \max(A)$, falls

$$x \in A \quad \wedge \quad (\forall a \in A : \ a \leq x).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a) Falls $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, so ist dieses eindeutig.

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ offen, so existiert *kein* Maximum von A.

(c) Falls kein Maximum von $A \subset \mathbb{R}$ existiert, so ist A offen.

(d) Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so existiert ein Maximum von A.

Führe zu den wahren Aussagen jeweils einen Beweis.
Gib zu den falschen Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Betrachte die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \frac{kn^k - 3}{n^2 + 1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Diskutiere die Konvergenz der Folge für $k = 1, 2, 3$.
Falls die Folge konvergiert, dann bestimme ihren Grenzwert.

Ausgabedatum: 10. November 2022 **Abgabetermin:** 14. November 2022, 10:00 Uhr.